UNIVERSITE TOULOUSE III **Mai 2011**

Licence Physique-Chimie et Applications

Mention Sciences Physiques et Chimiques-L3

Electromagnétisme de la matière

Examen terminal

(*durée 2h*)

I. **Question de cours** :

Ecrire les quatre équations de Maxwell dans la matière reliant entre eux les vecteurs H, D, E, B ainsi que les relations constitutives.

II. Cylindre allongé d'axe Oz.

On considère un cylindre allongé d'axe Oz soumis à un champ électrique $\mathbf{E}_a = E_0\, \mathbf{e}_z$. Le cylindre est constitué d'un milieu l.h.i. et il est le siège d'un vecteur polarisation **P** résultant du champ électrique $\mathbf{E}_a$.

1) Calculer le champ électrique $\mathbf{E}_{in}$ créé dans le cylindre allongé uniformément polarisé parallèlement à son axe Oz : $\mathbf{P} = P\, \mathbf{e}_z$.
2) Le champ électrique $\mathbf{E}_a$ varie maintenant à basse fréquence : $\mathbf{E}_a = E_0 \sin\omega t\ \mathbf{e}_z$, où la pulsation ω est inférieure à toutes les pulsations de résonance du milieu. En utilisant des considérations de symétrie et les équations de Maxwell, établir les expressions de $\mathbf{H}_{in}$ et $\mathbf{B}_{in}$ en fonction de P_0, ω, t, ρ, ε_0, μ_0, de la perméabilité magnétique relative μ_r , de la permittivité diélectrique ε_r et des vecteurs de la base cylindrique d'axe Oz.

En coordonnées cylindriques pour un vecteur $\vec{V}$, on a:

$$\mathbf{rot}\vec{\mathbf{V}} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\vec{\mathbf{e}}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right)\vec{\mathbf{e}}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{\mathbf{e}}_z .$$

III. Pression magnétique et courant de surface au voisinage de la surface plane d'un milieu supraconducteur.

Nous admettrons que le courant supraconducteur est donné par $\mathbf{J} = -(ne^2/m)\, \mathbf{A}$ où **A** est le potentiel vecteur (le champ magnétique est $\mathbf{B} = \mathbf{rot}\ \mathbf{A}$), e, n et m sont respectivement la charge, la masse et la densité volumique des électrons.

1) En utilisant l'identité $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{B}) = \mathbf{grad}(\mathrm{div}\mathbf{B}) - \mathbf{\Delta B}$, montrer que l'on peut écrire : $\mathbf{\Delta B} = \mathbf{B} / \lambda^2$ où $\lambda^2 = m/(\mu_0 n e^2)$. Calculer numériquement λ pour m = 0,91 10^{-30} kg, e = 1,6 10^{-19} C, n = 10^{29} m^{-3}. Commenter.
2) Dans un trièdre orthonormé Oxyz, un milieu supraconducteur occupe tout le demi-espace x> 0. Le champ magnétique B dans le demi espace x < 0 est $\mathbf{B} = B_0\, \mathbf{e}_z$. En prenant en compte les invariances par translation, démontre que $B(x) = B_0 \exp(-x / \lambda)\, \mathbf{e}_z$.
3) Déduire le courant volumique **j** à l'intérieur du supraconducteur et montrer que **j** est orienté selon $\mathbf{e}_y$. Donner l'expression complète de **j**(x).
4) Par unité de volume $d\tau = dx\, dy\, dz = dx\, dS$ du supraconducteur, calculer la force de Laplace $d^2\mathbf{f}$ en fonction de **j** , $d\tau$ et **B**, puis la force par unité de surface $d\mathbf{f}/dS = \int_0^\infty \frac{d^2\vec{f}}{dx}\,dx$. Montrer que l'on peut définir une pression magnétique : $\mathbf{P} = (B_0^2 / 2\mu_0)\,\mathbf{e}_x$.

5) Calculer le courant surfacique $\mathbf{J}_S = \int_0^\infty \vec{j}(x)\, dx$. Montrer que la relation de passage pour **B** entre l'extérieur et l'intérieur profond du matériau (à x >> λ).
6) En utilisant la relation $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, montrer l'homogénéité de la formule : $\lambda^2 = m/(\mu_0 n e^2)$.

IV. Lévitation d'un disque supraconducteur.

Un supraconducteur (A) en forme d'anneau plat d'axe Oz est représenté en coupe sur la figure 1.Le trou circulaire au centre de l'anneau est de rayon a et pour surface S. Le rayon extérieur de l'anneau est b. Au-dessus de l'anneau (A), supposé horizontal, est placé un autre supraconducteur (B) dont la surface plane et horizontale est située à la distance h de l'anneau (A). Un aimant permanent, fixe par rapport à (A), produit un champ **B** dont les lignes de champ sont représentées sur la figure 1. Ces lignes entrent par la base d'un cylindre fictif (Σ) d'axe Oz et ressortent perpendiculairement à la surface latérale. On admet que le flux magnétique Φ_0 à travers S est une constante indépendante du temps. Dans la région située entre les deux supraconducteurs et à une distance ρ de l'anneau, avec $a < \rho < b$, le champ magnétique est supposé radial ($\mathbf{B} = B(\rho)\ \mathbf{e}_\rho$). On néglige les effets de bord qui correspondent au caractère non-parallèle des lignes de champ dans les voisinages de $\rho = a$ et $\rho = b$.

1) Exprimez le flux magnétique Φ sortant de la surface de rayon ρ en fonction de h, ρ et B(ρ). Justifier le lien entre Φ et Φ_0 . En déduire l'expression de B(ρ) en fonction de ρ, h et Φ_0 .
2) En utilisant le résultat de la question III-4 donner l'expression de la pression magnétique P qui s'exerce sur la face inférieure du supraconducteur (B).
3) En déduire la force totale **F** d'origine magnétique qui s'exerce sur le supra (B).
4) Si le poids m**g** du supraconducteur (B) est porté par l'axe Oz, à quelle hauteur h y aura-t-il stabilité de (B) ?

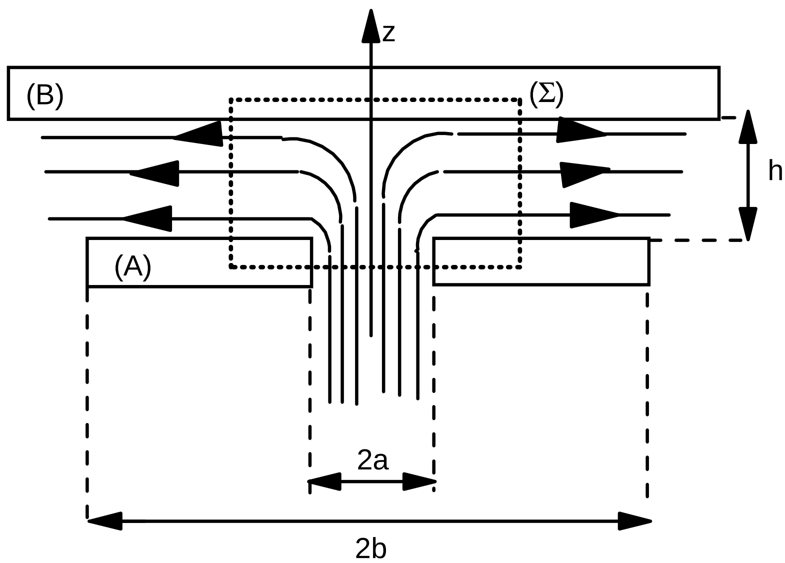

Figure 1